**Estrategias de pivoteo para reducir los errores.**

¡Preferencia: tener multiplicador con magnitud pequeña!

Ejemplo: Resolver el sistema empleando aritmética de 8 dígitos usando eliminación gaussiana:



…..  ….. 

m21= -1/10-8= -108



x = 0

* Solución es (0, 0.1234), pero x = 4y

 - magnitud de multiplicador (provoca errores grandes cuando hay redondeo de PC).

Solución: cambiar las dos ecuaciones de lugares, entonces:

 - magnitud pequeña.

* Resolveremos cambiando el orden de las dos ecuaciones:

10^-8F1+F2 

y = 0.1234 x = 0.4936



* Conclusión: reordenando los renglones (ecuaciones) se mejora en gran medida la calidad de la solución deducida.

Ejemplo:



* Solución exacta es x1=x2=1.0
* Utilizamos el Método de Gauss visto (sin previos cambios):





Sustitución regresiva nos da:

X2=1.001

X1=0.9956

Ejemplo:







X1=X2=1.000

* **Los métodos que usan las estrategias de pivoteo: eligen como pivote el elemento de mayor magnitud.**

**Pivoteo parcial: Mantener las magnitudes relativas de los elementos de la matriz U**



 Aquí en col. 2 es elemento 7

Entonces multiplicadores serán <1 en su valor absoluto

Entonces propague un error más pequeño

**Pivoteo parcial escalado:**

**Propósito es mantener las magnitudes relativas de los elementos de la matriz U del mismo orden que las de los coeficientes de la matriz original**





Ejemplo:



**fila 2 **

**fila 3 **

**fila 4 **

**Luego, fila 2: 4/5=0.8**

**Luego, fila 3: 6/15=0.4**

**Luego, fila 4: 7/14=0.5**

**máximo da la fila 2 que se elija como fila pivote**

**Matrices mal condicionadas**.

* Una matriz A esta mal condicionada si existe una matriz B de manera que cambios pequeños en los elementos de A o B provocan cambios grandes en 
* Se dice que el sistema AX=B esta mal condicionado si A esta mal condicionada.

**Causas posibles:**

* Matriz “casi singular”
* Ecuaciones corresponden a dos rectas casi paralelas.

**Ejemplo:**



* Consideramos la solución aproximada



* Reemplazándola en el sistema, obtenemos



* Solución exacta: x=0.8 y=0.6
* Observamos la grafica



* Siguiente conjunto son las soluciones que “casi se verifican”



**FACTORIZACION TRIANGULAR**

**Definición:** Diremos que una matriz invertible admite una factorización triangular o factorización LU si puede expresarse como el producto de una matriz triangular inferior L, cuyos elementos diagonales son todos iguales a 1, por una matriz triangular superior U:





Solución de un sistema lineal.



1. Resolver  (Sustitución progresiva)
2. Resolver  (Sustitución regresiva)





Factorizacion triangular.







**Teorema.**  (FACTORIZACION DIRECTA SIN INTERCAMBIO DE FILAS).

Supongamos que podemos llevar a cabo hasta el final el proceso de eliminación gaussiana, sin intercambios de filas, para resolver un sistema de ecuaciones lineales cualquiera AX=B. Entonces, la matriz A puede factorizarse como el producto de una matriz triangular inferior L por una matriz triangular superior U, es decir, A=LU.

**Matrices de permutación**.

* Puede ocurrir que una matriz invertible no admite factorizacion A=LU.

Por ejemplo:





**Definición:** Una matriz de permutación P es una matriz cuadrada tal que en cada fila y cada columna solo tiene un elemento igual a 1 siendo todos los demás iguales a cero.

Ejemplo:



**Teorema**. Supongamos que es una matriz de permutación. Entonces PA es una matriz que se obtiene permutando las filas de A en el mismo orden: fila k1 de A, fila k2 de A,…, fila kN de A.

Ejemplo:



**Teorema:** Si P es una matriz de permutación, entonces es invertible y se tiene ****

**Teorema:** Si A es una matriz invertible, entonces existe una matriz de permutación P tal que admite una factorizacion triangular PA=LU.



**Teorema:** (Factorizacion indirecta: PA=LU).

Sea A una matriz cuadrada. Supongamos que el proceso de eliminación gaussiana puede llevarse a cabo hasta el final para resolver un sistema cualquiera AX=B, pero que hemos realizado intercambios de filas. Entonces existe una matriz de permutación P tal que el producto PA puede factorizarse como el producto de una matriz triangular inferior L por una matriz triangular superior U:

PA=LU

Proceso completo seria:

1. Construir matrices L,U y P.
2. Calcular el vector columna PB:

Ax=B

PAx=PB

LUx=PB

1. Hallar Y resolviendo LY=PB con sust. Progresiva
2. Hallar X resolviendo UX=Y con sust. Regresiva.

Ejercicio: Descomponga la matriz

1 2 1

A = 2 6 3 en su forma LU o PLU.

3 8 5



Solución de un sistema de ecuaciones lineales:

X=inv(A)\*B

X = A\B

null(A) resuelve el sistema homogéneo correspondiente

rref.(A) forma escalonada reducida

S = solve('x + y = 1','x - 11\*y = 5')

Resolver el siguiente sistema con el método LU utilizando MATLAB:





Tarea:

1 Resolver el sistema utilizando eliminación de Gauss con pivoteo parcial y después con pivoteo parcial escalado.

2x-3y+100z=1

x+10y-0.001z=0

3x-100y+0.01z=0

2 Ejercicio: Resolver los siguientes sistemas utilizando eliminación gaussiana y redondeo en tres dígitos, a) sin pivoteo, b) con pivoteo parcial y comparar con la solución exacta:



Solución: 

**3.**

****

4. Para que numero k es singular la siguiente matriz:



5. Consideramos las dos matrices triangulares superiores

Probar que su producto C=AB es también triangular superior